Bemærkninger om nogle Formler hörende til de angulære Sectioners Theorie*).

Af

Professor **Ramus.**

1. Da de angulære Sectioners Theorie er bleven behandlet i senere Tider af saa mange forskjellige Forfattere, af hvilke det her vil være nok at nævne Poisson, Lacroix, Poinsot, Abel, Cauchy**), er det naturligt, at ikke blot de mangelfulde Formler, som Euler og Lagrange havde fremstillet, ere blevne behørigen completerede, men tillige, at intet væsentligt Punkt i denne Theorie kan trænge til nogen yderligere Berigtigelse. Derimod vil det kunne findes, at de Udviklinger, som haves for Potentser af Cosinus og Sinus, $\cos^m z$ og $\sin^m z$, ved Rækker, som gaae frem efter Cosinusser og Sinusser af Buerne

$$mz,\ (m-2)z,\ (m-4)z,\ (m-6)z,\ldots,$$

ere, forsaavidt m ikke er et heelt Tal, støttede til en mindre tilfredsstillende Beviisførelse, end de almindelige Udviklinger, som omvendt haves for $\cos mz$ og $\sin mz$ ved Rækker ordnede efter stigende Potentser enten af $\cos z$ eller af $\sin z$. En ringe Forandring i Fremstillingen vil udentvivl kunne bøde paa denne

*) Denne lille Afhandling fandtes iblandt vor afdøde Collegas efterladte Papirer, og maa efter Form og Indhold at dømme have været bestemt for Oversigterne.

**) *Poisson*, Corresp. sur l'école polyt., T. II, Pag. 212; bulletin des sciences math., par Ferussac, T. IV, Pag. 140 og 344.

Lacroix, Traité du calcul diff. et du calcul intégral, 2de éd., T. III., Pag. 605.

Poinsot, Recherches sur l'analyse des sections angulaires, Paris 1825.

Abel, Untersuchungen über die Reihe $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\ldots$ (Crelles Journal T. I, Pag. 311); jvf. Oeuvres complètes de *N. H. Abel*, T. I, Pag. 66.

Cauchy, Exercices de mathém., T. I (Paris 1826), Pag. 1.

Mangel, idet man vel med Poisson hensigtsmæssigen afleder $2\cos z$ og $2\sin z$ af det almindeligere Udtryk

$$R = \sqrt{1+2t\cos 2z+t^2}$$

ved at lade t convergere til ± 1, men tillige søger i Udviklingerne for R^m efter stigende Potentser af t at bestemme de discontinuerte Factorer ved en lignende Fremgangsmaade, som den ellers Poinsot har anvendt i andre Tilfælde af de angulære Sectioners Theorie.

2. Ifølge Binomialformlen findes

$$(1+te^{z\sqrt{-1}})^m = 1^m[1+m_1te^{z\sqrt{-1}}+m_2t^2e^{2z\sqrt{-1}}+m_3t^3e^{3z\sqrt{-1}}+\ldots], \quad (1)$$

idet for Kortheds Skyld

$$m_1 = \frac{m}{1}, \quad m_2 = \frac{m(m-1)}{1.2}, \quad m_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}, \ldots \quad (2)$$

og hvor m og z kunne have hvilkesomhelst reelle Værdier, men t maae ikke gaae udenfor Grændserne ± 1, undtagen naar m er positiv heel, hvorved Rækken bliver endelig, altsaa t ubegrændset. Ved at transformere Exponentiellerne til deres Udtryk ved Sinus og Cosinus, bliver Rækken (1) opløst i to Rækker, som kunne fremstilles ved

$$\left.\begin{aligned} \varphi(z) &= 1+m_1t\cos z+m_2t^2\cos 2z+m_3t^3\cos 3z+\ldots, \\ \psi(z) &= \phantom{1+{}} m_1t\sin z+m_2t^2\sin 2z+m_3t^3\sin 3z+\ldots. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Indsættes tillige det bekjendte Udtryk for 1^m, vil Ligning (1) kunne skrives saaledes:

$$(1+te^{z\sqrt{-1}})^m = (\cos 2mi\pi+\sqrt{-1}\sin 2mi\pi)(\varphi(z)+\sqrt{-1}\,\psi(z)). \quad (4)$$

For at bestemme alle Værdierne af venstre Side uden Hjælp af Rækkeudviklinger sættes

$$1+t\cos z = R\cos\theta, \quad t\sin z = R\sin\theta, \quad (5)$$

altsaa

$$R = \sqrt{1+2t\cos z+t^2}, \quad (6)$$

som stedse tages positiv, hvorefter θ lettest erholdes ved

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{t\sin z}{1+t\cos z}. \quad (7)$$

Da $\cos\theta$ er stedse positiv (idet t ikke falder udenfor Grændserne ± 1), men $\sin\theta$ har samme Fortegn som $t\sin z$, vil θ

som beliggende mellem $\pm\frac{\pi}{2}$ være aldeles bestemt ved Ligning (7). Man erholder altsaa

$$(1+te^{z\sqrt{-1}})^m = R^m[\cos m(\theta+2r\pi)+\sqrt{-1}\sin m(\theta+2r\pi)], \quad (8)$$

idet R^m ligesom R tages positiv, og r betegner et hvilketsomhelst heelt Tal. Ved Sammenligning af Udtrykkene (4) og (8) erholdes

$$\left.\begin{aligned} R^m\cos m(\theta+2r\pi) &= \cos 2mi\pi.\varphi(z) - \sin 2mi\pi.\psi(z), \\ R^m\sin m(\theta+2r\pi) &= \sin 2mi\pi.\varphi(z) + \cos 2mi\pi.\psi(z). \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Disse Ligninger ere complete, idet r og i betegne vilkaarlige hele Tal; men det vil ogsaa let findes, hvorledes disse Tal afhænge af hinanden, for at begge Sider kunne fremstille den samme Værdie. F. Ex. for $z=0$ haves $R=1+t$, $\theta=0$, $\psi(z)=0$ og $\varphi(z)=(1+t)^m$, hvorved Ligningerne (9) reduceres til

$$\cos 2mr\pi = \cos 2mi\pi, \quad \sin 2mr\pi = \sin 2mi\pi,$$

hvoraf sluttes, at $r=i$. Ligesaa for $z=n\pi$, idet n er et hvilketsomhelst heelt Tal; thi man har da atter $\theta=0$, $\psi(z)=0$, men $R=1+(-1)^n t$ og $\varphi(z)=[1+(-1)^n t]^m$. Sættes nu i (9) $r=i$ og bestemmes ved Elimination særskilt $\varphi(z)$ og $\psi(z)$, erholdes

$$R^m\cos m\theta = \varphi(z), \quad R^m\sin m\theta = \psi(z) \quad (10)$$

eller

$$R^m = \frac{\varphi(z)}{\cos m\theta} = \frac{\psi(z)}{\sin m\theta}. \quad (11)$$

3. Af de to Rækker $\varphi(z)$ og $\psi(z)$, bestemte ved (3), kunne disse to andre afledes

$$\left.\begin{aligned} P(z) &= \cos\frac{m}{2}z + m_1 t\cos\frac{m-2}{2}z + m_2t^2\cos\frac{m-4}{2}z + m_3t^3\cos\frac{m-6}{2}z + .., \\ Q(z) &= \sin\frac{m}{2}z + m_1 t\sin\frac{m-2}{2}z + m_2t^2\sin\frac{m-4}{2}z + m_3t^3\sin\frac{m-6}{2}z + .., \end{aligned}\right\} (12)$$

nemlig

$$\left.\begin{aligned} \cos\frac{m}{2}z.\varphi(z) + \sin\frac{m}{2}z.\psi(z) &= P(z), \\ \sin\frac{m}{2}z.\varphi(z) - \cos\frac{m}{2}z.\psi(z) &= Q(z). \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Altsaa følger af Ligningerne (10)

$$R^m \cos m(\tfrac{1}{2}z - \theta) = P(z), \quad R^m \sin m(\tfrac{1}{2}z - \theta) = Q(z). \tag{14}$$

Ved at skrive overalt $2z$ istedetfor z kunne disse to Udviklinger (14) fremstilles saaledes:

$$\left.\begin{aligned} &(\sqrt{1+2t\cos 2z+t^2})^m \\ &= \frac{1}{\cos m(z-\theta)}[\cos mz + m_1 t\cos(m-2)z + m_2 t^2 \cos(m-4)z + ..] \\ &= \frac{1}{\sin m(z-\theta)}[\sin mz + m_1 t \sin(m-2)z + m_3 t^2 \sin(m-4)z + ..], \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

idet θ beliggende mellem $\pm \tfrac{1}{2}\pi$ er bestemt ved

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{t\sin 2z}{1 + t\cos 2z} \tag{16}$$

Af disse Ligninger (15) og (16) er det at Udviklingerne for $\cos^m z$ og $\sin^m z$ afledes ved at lade t convergere til ± 1. For $t = 1$ reduceres Ligning (16) til

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg} z, \tag{17}$$

saa at θ beliggende mellem $\pm \tfrac{1}{2}\pi$ er bestemt af Værdien af z saaledes, at naar

$$z = n\pi + x, \tag{18}$$

hvor n er et heelt Tal og x beliggende mellem $\pm \tfrac{1}{2}\pi$, haves

$$\theta = x. \tag{19}$$

Altsaa reduceres Udviklingerne (15) til

$$\left.\begin{aligned} &(2\cos z \,.\, \cos n\pi)^m \\ &= \frac{1}{\cos mn\pi}[\cos mz + m_1 \cos(m-2)z + m_2 \cos(m-4)z + \ldots] \\ &= \frac{1}{\sin mn\pi}[\sin mz + m_1 \sin(m-2)z + m_2 \sin(m-4)z + \ldots]. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

For $t = -1$ reduceres Ligning (16) til

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(z - \tfrac{1}{2}\pi). \tag{21}$$

Antages atter Værdien af z fremstillet ved Udtrykket (18), men x beliggende mellem 0 og π, erholdes ifølge (21)

$$\theta = x - \tfrac{1}{2}\pi, \tag{22}$$

altsaa $z - \theta = (n + \tfrac{1}{2})\pi$, hvorved Ligningerne (15) reduceres til:

$$
\left.\begin{aligned}
&(2 \sin z \,.\, \cos n\pi)^m \\
&= \frac{1}{\cos m(n+\frac{1}{2})\pi}\left[\cos mz - m_1 \cos(m-2)z + m_2 \cos(m-4)z - \ldots\right] \\
&= \frac{1}{\sin m(n+\frac{1}{2})\pi}\left[\sin mz - m_1 \sin(m-2)z + m_2 \sin(m-4)z - \ldots\right].
\end{aligned}\right\} (23)
$$

Disse Formler (20) og (23) falde sammen med de bekjendte Udviklinger, naar det vel fastholdes, at i (20) er z antaget beliggende mellem $n\pi \pm \frac{1}{2}\pi$, men i (23) mellem $n\pi$ og $(n+1)\pi$*). Da venstre Side alene forstaaes som den positive Værdie, saa mangler paa høire Side Factoren 1^m, som derimod maatte tilsættes, hvis venstre Side skulde forstaaes saaledes, at alle Værdierne af m^{te} Potents medtoges.

4. Ligningerne (10) eller (11), som her ere lagte til Grund for Udviklingerne (15) og derved igjen for de mere specielle (20) og (23), lede ogsaa med Lethed til flere andre bekjendte Sætninger. F. Ex. for $m = -1$ erholdes ligefrem ifølge (5) og (6)

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{1+t\cos z}{1+2t\cos z+t^2} &= 1 - t\cos z + t^2 \cos 2z - t^3 \cos 3z + \ldots, \\
\frac{t\sin z}{1+2t\cos z+t^2} &= t\sin z - t^2 \sin 2z + t^2 \sin 3z - \ldots.
\end{aligned}\right\} (24)
$$

For $m = -2$ erholdes ifølge (5) og (6)

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{1+2t\cos z+t^2\cos 2z}{(1+2t\cos z+t^2)^2} &= 1 - 2t\cos z + 3t^2\cos 2z - 4t^3\cos 3z + \ldots, \\
\frac{2t\sin z+t^2\sin 2z}{(1+2t\cos z+t^2)^2} &= 2t\sin z - 3t^2\sin 2z + 4t^3\sin 3z - \ldots,
\end{aligned}\right\} (25)
$$

men disse to Ligninger udledes ogsaa af de to foregaaende ved Multiplication med t og derefter Differentiation med Hensyn til t. Naar overhoved m er et heelt Tal, positivt eller negativt, vil

---

*) Jvf. Forfatterens „Algebra og Functionslære" Pag. 201, hvor Betegnelsen for z er tagen i samme Betydning baade for Udviklingen af $(2\cos z)^m$ og $(2\sin z)^m$; men den Fremstilling, som her er brugt, er simplere.

man kunne formedelst (5) og (6) eliminere θ af Formlerne (10). Sættes nemlig for Kortheds Skyld

$$\left.\begin{aligned}
&\mu_1 = \frac{m}{1},\ \mu_3 = \frac{m(m^2-1)}{1.2.3},\ \mu_5 = \frac{m(m^2-1)(m_2-9)}{1.2.3.4.5},\ldots \\
&\qquad\qquad \mu_{2i+1} = \frac{m(m^2-1)\ldots(m^2-\overline{2i-1}^2)}{1.2.3\ \ldots\ (2i+1)}, \\
&\mu_2 = \frac{m^2}{1.2},\ \mu_4 = \frac{m^2(m^2-4)}{1.2.3.4},\ \mu_6 = \frac{m^2(m^2-4)(m_2-16)}{1.2.3.4.5.6},\ldots \\
&\qquad\qquad \mu_{2i} = \frac{m^2(m^2-4)\ldots(m^2-\overline{2i-2}^2)}{1.2.3\ \ldots\ 2i},
\end{aligned}\right\} (26)$$

saa haves som bekjendt for m lige:

$$\left.\begin{aligned}
\cos m\theta &= (-1)^{\frac{m}{2}}[1-\mu_2\cos^2\theta+\mu_4\cos^4\theta-\mu_6\cos^6\theta+\ldots] \\
&= 1-\mu_2\sin^2\theta+\mu_4\sin^4\theta-\mu_6\sin^6\theta+\ldots,
\end{aligned}\right\} (27)$$

for m ulige:

$$\left.\begin{aligned}
\cos m\theta &= (-1)^{\frac{m-1}{2}}[\mu_1\cos\theta-\mu_3\cos^3\theta+\mu_5\cos^5\theta-\ldots], \\
\sin m\theta &= \mu_1\sin\theta-\mu_3\sin^3\theta+\mu_5\sin^5\theta-\ldots.
\end{aligned}\right\} (28)$$

Ogsaa haves for m lige (ved Differentiation af $\cos m\theta$ med Hensyn til θ):

$$\left.\begin{aligned}
\sin m\theta &= \frac{(m-1)^{\frac{m+2}{2}}\sin\theta}{m}[2\mu_2\cos\theta-4\mu_4\cos^3\theta+6\mu_6\cos^5\theta-\ldots] \\
&= \frac{\cos\theta}{m}[2\mu_2\sin\theta-4\mu_4\sin^3\theta+6\mu_6\sin^5\theta-\ldots].
\end{aligned}\right\} (29)$$

Er m positiv heel, ville Rækkerne $\varphi(z)$ og $\psi(z)$ være endelige, saa at Ligningerne (10) blive identiske, naar $\cos m\theta$ og $\sin m\theta$ bestemmes ved (27), (28), (29), og Udtrykkene (5) for $\sin\theta$ og $\cos\theta$ indsættes. Derimod for m negativ heel erholdes Udviklinger i uendelige Rækker. F. Ex. $m = -3$ giver:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1+3t\cos z+3t^2\cos 2z+t^3\cos 3z}{(1+2t\cos z+t^2)^3} \\
&= 1-3t\cos z+6t^2\cos 2z-10t^3\cos 3z+\ldots, \\
&\frac{3t\sin z+3t^2\sin 2z+t^3\sin 3z}{(1+2t\cos z+t^2)^3} \\
&= 3t\sin z-6t^2\sin 2z+10t^3\sin 3z-\ldots.
\end{aligned}\right\} (30)$$

Almindeligt haves ifølge (10) ved at lade m være positiv heel, og dernæst forandre m til $-m$:

$$\left.\begin{aligned} R^m\cos m\theta &= 1+\frac{m}{1}t\cos z+\frac{m(m-1)}{1.2}t^2\cos 2z+\ldots \\ &\qquad +\frac{m}{1}t^{m-1}\cos(m-1)z+t^m\cos mz, \\ R^{-m}\cos m\theta &= 1-\frac{m}{1}t\cos z+\frac{m(m+1)}{1.2}t^2\cos 2z \\ &\qquad -\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}t^3\cos 3z+\ldots, \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

ligeledes

$$\left.\begin{aligned} R^m\sin m\theta &= \frac{m}{1}t\sin z+\frac{m(m-1)}{1.2}t^2\sin 2z+\ldots \\ &\qquad +\frac{m}{1}t^{m-1}\sin(m-1)z+t^m\sin mz, \\ R^{-m}\sin m\theta &= \frac{m}{1}t\sin z-\frac{m(m+1)}{1.2}t^2\sin 2z \\ &\qquad +\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}t^3\sin 3z-\ldots. \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Elimineres nu $\cos m\theta$ mellem de to Ligninger (31), og $\sin m\theta$ mellem de to Ligninger (32), erholdes

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1+\frac{m}{1}t\cos z+\frac{m(m-1)}{1.2}t^2\cos 2z\ldots+t^m\cos mz}{(1+2t\cos z+t^2)^m} \\ &\qquad = 1-\frac{m}{1}t\cos z+\frac{m(m+1)}{1.2}t^2\cos 2z-\ldots, \\ &\frac{\frac{m}{1}t\sin z+\frac{m(m-1)}{1.2}t^2\sin 2z\ldots+t^m\sin mz}{(1+2t\cos z+t^2)^m} \\ &\qquad = \frac{m}{1}t\sin z-\frac{m(m+1)}{1.2}t^2\sin 2z+\ldots. \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Disse Udviklinger (33) indbefatte specielt (24) for $m=1$, (25) for $m=2$, (30) for $m=3$.

5. Ved i Formlerne (10) at lade t convergere til $+1$, erholdes, naar for z skrives $2z$, og atter Formlerne (18) og (19) anvendes,

$$\left.\begin{array}{l}(2\cos x)^m \cos mx = 1 + m_1 \cos 2x + m_2 \cos 4x + m_3 \cos 6x + \ldots,\\ (2\cos x)^m \sin mx = \phantom{1 +{}} m_1 \sin 2x + m_2 \sin 4x + m_3 \sin 6x + \ldots,\end{array}\right\}\ (34)$$

hvor x ligger mellem $\pm\frac{1}{2}\pi$. Man kunde ogsaa lade t convergere til -1, men det vilde give de samme to Formler (34) ved blot i dem at forandre x til $\frac{1}{2}\pi - x$. Naar disse Rækker (34) eller de mere almindelige Rækker (10), hvoraf de ere afledte, sammenholdes med de bekjendte Udtryk, som haves ved bestemte Integraler for Coefficienterne i Udviklingen af en hvilkensomhelst Function $f(x)$ i trigonometriske Rækker, saa findes de tilsvarende Integralers Værdier. Af Rækkerne (34) udledes paa denne Maade, idet for x skrives $\frac{1}{2}x$,

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^\pi \cos^m \frac{1}{2}x \,.\, \cos\frac{m}{2}x \,.\, dx = \frac{\pi}{2^m},\\ \displaystyle\int_0^\pi \cos^m \frac{1}{2}x \,.\, \cos\frac{m}{2}x \,.\, \cos nx \,.\, dx = \frac{\pi}{2^{m+1}}\, m_n,\\ \displaystyle\int_0^\pi \cos^m \frac{1}{2}x \,.\, \sin\frac{m}{2}x \,.\, \sin nx \,.\, dx = \frac{\pi}{2^{m+1}}\, m_n,\end{array}\right\}$$

idet n er et positivt heelt Tal. Ligesaa opsættes let de mere sammensatte Integraler, som følge af Rækkerne (10), og de, som følge af de speciellere Rækker (33), som ere udledte af (10) ved at lade m betegne et positivt heelt Tal; men den nærmere Fremstilling af disse Integraler saavelsom de forskjellige Undersøgelser, som dertil kunde knyttes, ligge udenfor Grændserne af nærværende Meddelelse.